Dr. H. Bobzin 9. Februar 2004

Ableitung der Kostenfunktion auf der Basis einer ineinandergesetzten (nested) CES-Funktion

$$x = C\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i^{\rho}\right)^{h/\rho} \qquad \text{mit} \quad v_i = \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} b_{ik} v_{ik}^{\tau_i}\right)^{\theta_i/\tau_i}$$

Anmerkungen:

- Die Produktionsfunktion ist homogen vom Grade h in den v_i.
- Die a_i lassen sich so normieren, das $\sum_i a_i = 1$ gilt. Die entsprechende Konstante kann aus der Klammer herausgezogen und unter C subsumiert werden.
- Wie man später sieht, ist der Ansatz nur für $\theta_i = 1$ sinnvoll.

Der Lagrange-Ansatz

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\mu_i} q_{ik} v_{ik} + \lambda \left[x - C\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} b_{ik} v_{ik}^{\tau_i}\right)^{\frac{\theta_i \rho}{\tau_i}}\right)^{h/\rho}\right]$$

liefert notwendige Bedingungen für ein Optimum

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial v_{ik}} &= q_{ik} - \lambda \frac{\partial x}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial v_{ik}} = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0\\
\frac{\partial x}{\partial v_i} &= C\frac{h}{\rho}\left(\sum_{r=1}^{m} a_r v_r^{\rho}\right)^{\frac{h}{\rho}-1} a_i \rho v_i^{\rho-1}\\
\frac{\partial v_i}{\partial v_{ik}} &= \frac{\theta_i}{\tau_i}\left(\sum_{\ell=1}^{\mu_i} b_{i\ell} v_{i\ell}^{\tau_i}\right)^{\frac{\theta_i}{\tau_i}-1} b_{ik}\tau_i v_{ik}^{\tau_i-1} \quad = \theta_i A b_{ik} v_{ik}^{\tau_i-1}
\end{aligned}$$

In jeder Gruppe $i = 1, \ldots, m$ lässt sich ein Index $i^* \in \{1, \ldots, \mu_i\}$ bestimmen, so dass

$$\frac{q_{ik}}{q_{ii^*}} = \frac{\partial x/\partial v_i}{\partial x/\partial v_i}\,\frac{\partial v_i/\partial v_{ik}}{\partial v_i/\partial v_{ii^*}} = \frac{\theta_i A b_{ik} v_{ik}^{\tau_i-1}}{\theta_i A b_{ii^*} v_{ii^*}^{\tau_i-1}} \implies v_{ik} = \left(\frac{q_{ik}}{q_{ii^*}}\frac{b_{ii^*}}{b_{ik}}\right)^{\frac{1}{\tau_i-1}} v_{ii^*}$$

Damit vereinfachen sich die Nebenbedingungen erheblich, denn

(*)
$$\begin{aligned}
v_i &= \left[\sum_{k=1}^{\mu_i} b_{ik}\left(\frac{q_{ik}}{q_{ii^*}}\frac{b_{ii^*}}{b_{ik}}\right)^{\frac{\tau_i}{\tau_i-1}} v_{ii^*}^{\tau_i}\right]^{\theta_i/\tau_i}\\
&= \left[\sum_{k=1}^{\mu_i}\left(\frac{q_{ik}^{\tau_i}}{b_{ik}}\right)^{\frac{1}{\tau_i-1}}\right]^{\theta_i/\tau_i}\left(\frac{b_{ii^*}}{q_{ii^*}}\right)^{\frac{\theta_i}{\tau_i-1}} v_{ii^*}^{\theta_i} \quad = B\left(\frac{b_{ii^*}}{q_{ii^*}}\right)^{\frac{\theta_i}{\tau_i-1}} v_{ii^*}^{\theta_i}
\end{aligned}$$

Auch in der Zielfunktion kann nun die Zahl der Variablen erheblich reduziert werden.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\mu_i} q_{ik} v_{ik} &= \sum_{k=1}^{\mu_i} q_{ik} \left(\frac{q_{ik}}{q_{ii^*}} \frac{b_{ii^*}}{b_{ik}} \right)^{\frac{1}{\tau_i - 1}} v_{ii^*} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{\mu_i} \left(\frac{q_{ik}^{\tau_i}}{b_{ik}} \right)^{\frac{1}{\tau_i-1}} \left(\frac{b_{ii^*}}{q_{ii^*}} \right)^{\frac{1}{\tau_i-1}}}{\left[\sum_{k=1}^{\mu_i} \left(\frac{q_{ik}^{\tau_i}}{b_{ik}} \right)^{\frac{1}{\tau_i-1}} \right]^{1/\tau_i} \left(\frac{b_{ii^*}}{q_{ii^*}} \right)^{\frac{1}{\tau_i-1}}} v_i^{1/\theta_i} \\
:\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\mu_i} q_{ik} v_{ik} &= \tilde{q}_i v_i^{1/\theta_i} \quad \text{mit} \quad \tilde{q}_i := \left[\sum_{k=1}^{\mu_i} \left(\frac{q_{ik}^{\tau_i}}{b_{ik}} \right)^{\frac{1}{\tau_i-1}} \right]^{1-\frac{1}{\tau_i}}
\end{aligned}$$

Spätestens an dieser Stelle wird deutlich, dass der Ansatz unter Berücksichtigung der konstanten Substitutionselastizität nur sinnvoll ist, wenn man sämtliche $\theta_i = 1$ setzt.

$$\sum_{k=1}^{\mu_i} q_{ik} v_{ik} = \tilde{q}_i v_i$$

Nun stellt sich das Problem der Kostenminimierung in der **klassischen Form** dar.

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \tilde{q}_i v_i | \; x \leq C \left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i^{\rho} \right)^{h/\rho} \right\}$$

Mit Hilfe der beiden Optimumbedingungen

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_r} &= \frac{\partial x / \partial v_i}{\partial x / \partial v_r} = \frac{C \frac{h}{\rho} \left(\sum_i a_i v_i^{\rho} \right)^{\frac{h}{\rho}-1} a_i \rho v_i^{\rho-1}}{C \frac{h}{\rho} \left(\sum_i a_i v_i^{\rho} \right)^{\frac{h}{\rho}-1} a_r \rho v_r^{\rho-1}} = \frac{a_i}{a_r} \frac{v_i^{\rho-1}}{v_r^{\rho-1}} \implies v_i = \left(\frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_r} \frac{a_r}{a_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} v_r \\
x &= C \left[\sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_r} \frac{a_r}{a_i} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} v_r^{\rho} \right]^{h/\rho} = C \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{a_r}{\tilde{q}_r} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} v_r^{\rho} \right]^{h/\rho}
\end{aligned}$$

lässt sich die Zielfunktion umformen in

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{q}_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \tilde{q}_i \left(\frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_r} \frac{a_r}{a_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} v_r = \frac{\sum_i \left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{a_r}{\tilde{q}_r} \right)^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left[\sum_i \left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{a_r}{\tilde{q}_r} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{1/\rho}} \left(\frac{x}{C} \right)^{1/h}$$

Basierend auf der CES-Struktur ergibt sich folgende **Kostenfunktion**

$$c(\tilde{\mathbf{q}}, x) = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \left(\frac{x}{C} \right)^{1/h},$$

Die **Substitutionselastizität** σ ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\ln(v_i/v_r)}{\mathrm{d}\ln \mathrm{GRS}}.$$

Darin ist die **Grenzrate der Substitution** zwischen zwei beliebigen v_i und v_r definiert als

$$\mathrm{GRS} = -\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}v_r} = \frac{\partial x/\partial v_r}{\partial x/\partial v_i} = \frac{a_r v_r^{\rho-1}}{a_i v_i^{\rho-1}} \iff \frac{v_i}{v_r} = \left(\frac{a_r}{a_i}\frac{1}{\mathrm{GRS}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

Die Logarithmierung liefert nun

$$\ln\frac{v_i}{v_r} = \frac{1}{\rho-1}\left(\ln\frac{a_r}{a_i} - \ln \mathrm{GRS}\right) \implies \sigma = \frac{\mathrm{d}\ln(v_i/v_r)}{\mathrm{d}\ln \mathrm{GRS}} = \frac{1}{1-\rho}$$

Unter Berücksichtigung der Substitutionselastizität resultiert dieselbe Kostenfunktion als

$$c(\tilde{\mathbf{q}}, x) = \left[\sum_{i=1}^{m} a_i^{\sigma}\tilde{q}_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \left(\frac{x}{C}\right)^{1/h}$$

Die optimalen Werte der v_i können über **Shephards Lemma** berechnet werden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial \tilde{q}_i} = v_i &= \frac{\rho-1}{\rho}\left[\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\tilde{q}_r^{\rho}}{a_r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}-1} \frac{1}{\rho-1}\left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}-1}\frac{\rho\tilde{q}_i^{\rho-1}}{a_i}\left(\frac{x}{C}\right)^{1/h}\\
&= \left[\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\tilde{q}_r^{\rho}}{a_r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]^{\frac{-1}{\rho}}\left(\frac{\tilde{q}_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\left(\frac{x}{C}\right)^{1/h}\\
&= \left[\sum_{r=1}^{m} a_r\left(\frac{a_i}{a_r}\frac{\tilde{q}_r}{\tilde{q}_i}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{-1}{\rho}}\left(\frac{x}{C}\right)^{1/h} \qquad \text{(alternativ)}
\end{aligned}$$

Der Rückschluss auf die v_{ik} ergibt sich aus der optimalen Zusammensetzung der v_i entsprechend der Bedingung (*) (mit $\theta_i = 1$)

$$v_{ii^*} = \frac{v_i}{B}\left(\frac{b_{ii^*}}{q_{ii^*}}\right)^{-\frac{1}{\tau_i-1}}$$

Alternativ kann man auch die Nachfrage nach dem Faktor v_{ii^*} über Shephards Lemma bestimmen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial q_{ii^*}} = v_{ii^*} &= \frac{\partial c}{\partial \tilde{q}_i}\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_{ii^*}} = v_i\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_{ii^*}}\\
&= v_i\left(1-\frac{1}{\tau_i}\right)\left[\sum_{k=1}^{\mu_i}\left(\frac{q_{ik}^{\tau_i}}{b_{ik}}\right)^{\frac{1}{\tau_i-1}}\right]^{-\frac{1}{\tau_i}}\frac{1}{\tau_i-1}\left(\frac{q_{ii^*}^{\tau_i}}{b_{ii^*}}\right)^{\frac{1}{\tau_i-1}-1}\frac{\tau_i q_{ii^*}^{\tau_i-1}}{b_{ii^*}}\\
&= v_i\left[\sum_{k=1}^{\mu_i}\left(\frac{q_{ik}^{\tau_i}}{b_{ik}}\right)^{\frac{1}{\tau_i-1}}\right]^{-\frac{1}{\tau_i}}\left(\frac{q_{ii^*}}{b_{ii^*}}\right)^{\frac{1}{\tau_i-1}}\\
&= \frac{v_i}{B}\left(\frac{b_{ii^*}}{q_{ii^*}}\right)^{-\frac{1}{\tau_i-1}}
\end{aligned}$$

Kostenanteile als Funktionen der Faktorpreise $\tilde{\mathbf{q}}$

$$\frac{\tilde{q}_i v_i}{c(\tilde{\mathbf{q}}, x)} = \frac{\tilde{q}_i \left[\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\tilde{q}_r^{\rho}}{a_r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]^{\frac{-1}{\rho}} \left(\frac{\tilde{q}_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{x}{C}\right)^{1/h}}{\left[\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\tilde{q}_r^{\rho}}{a_r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \left(\frac{x}{C}\right)^{1/h}} = \frac{\left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}}{\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\tilde{q}_r^{\rho}}{a_r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}} = \frac{\left(a_i \tilde{q}_i^{-\rho}\right)^{\sigma}}{\sum_{r=1}^{m} \left(a_r \tilde{q}_r^{-\rho}\right)^{\sigma}}$$

Kostenanteile als Funktionen der Faktornachfrage (Lagrange-Funktion für den Standardfall)

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \tilde{q}_i - \lambda h C \left(\sum_{r=1}^{m} a_r v_r^{\rho}\right)^{\frac{h}{\rho}-1} a_i v_i^{\rho-1} = 0 \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \tilde{q}_i v_i = \lambda h C D a_i v_i^{\rho}$$

Also lautet der Kostenanteil (mit $v_i = v_i(\tilde{\mathbf{q}})$)

$$\frac{\tilde{q}_i v_i}{c(\tilde{\mathbf{q}}, x)} = \frac{\tilde{q}_i v_i}{\sum_r \tilde{q}_r v_r} = \frac{a_i v_i^{\rho}}{\sum_r a_r v_r^{\rho}}$$

Bei einer linearhomogenen CES-Funktion ($h = 1$) impliziert die Nullgewinnbedingung ($px = c(\tilde{\mathbf{q}}, x)$)

$$p = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\tilde{q}_i^{\rho}}{a_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \equiv \left[\sum_{i=1}^{m} a_i^{\sigma} \tilde{q}_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Die variablen **Inputkoeffizienten** lauten nun entsprechend Shephards Lemma

$$\frac{v_i}{x} = \left(a_i \, \frac{p}{\tilde{q}_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} = \left(a_i \, \frac{p}{\tilde{q}_i}\right)^{\sigma}$$